第 30 講　正規分布
§1　連続分布

要点整理 と 公式

要点 ①　連続型確率変数と連続分布

　あるものの個数やあることがらが起こった回数のように，とびとびの値をとる確率変数を「離散型確率変数」という。これに対して，重さ，長さ，時間のように連続的な値をとる確率変数を「　　　　　　　」という。

長さ (cm)	相対度数
9.1 以上 9.3 未満	0.02
9.3 ～ 9.5	0.03
9.5 ～ 9.7	0.09
9.7 ～ 9.9	0.18
9.9 ～ 10.1	0.30
10.1 ～ 10.3	0.20
10.3 ～ 10.5	0.14
10.5 ～ 10.7	0.03
10.7 ～ 10.9	0.01
計	1.00

　右の表は，紙テープを目分量で 10 cm の長さになるように切り，切り取られたテープの実際の長さを測定することを 100 回繰り返した結果を，相対度数で表したものである。

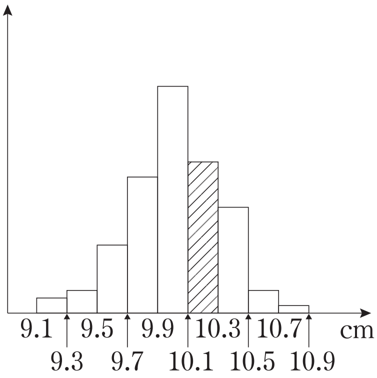
　実際の長さを X cm とすると，表より

$$10.3 \leqq X < 10.5$$

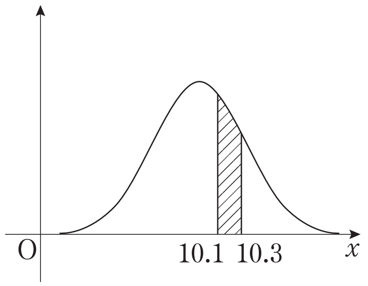
で表される階級の相対度数が　　　であることから，X が

$$10.3 \leqq X < 10.5$$

の階級に属する　　　が 0.14 であると考えることができる。このように，各階級の相対度数を，X が各階級に属する確率と考えると，X は各階級に属する確率が定まる確率変数と考えられ，その確率分布は，右のような相対度数の分布の表になる。



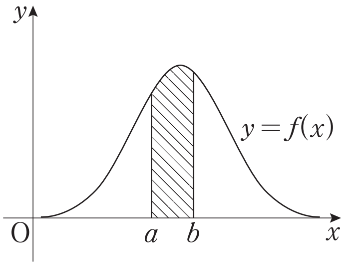
　右のグラフは，上の測定で得られたデータを用いて，各階級に対応する柱状部(長方形)の　　　が，その階級の相対度数と等しくなるように縦軸の目盛りをとったヒストグラムである。例えば，X が 10.1 cm 以上 10.3 cm 未満の値をとる確率は，右の図の斜線部分の面積に等しく，　　　である。また，これらの長方形の面積の和は　　である。



　測定する個数を増やし，さらに階級の幅を小さくすると，ヒストグラムの形は 1 つの曲線に近づいていく。右の図において，曲線と 2 直線 $x=10.1$，$x=10.3$ および x 軸で囲まれた部分の面積は 0.20 となり，この面積が X が 10.1 cm

以上 10.3cm 未満の値をとる確率を表す。

一般に, 連続型確率変数 X に 1 つの関数 $y=f(x)$ が対応し, $a \leqq X \leqq b$ となる確率が右の図の斜線部分の面積に等しいとき, 関数 $f(x)$ を X の「　　　　　　　」といい, $y=f(x)$ のグラフを X の「　　　　　」という。



確率密度関数 $f(x)$ の性質は以下

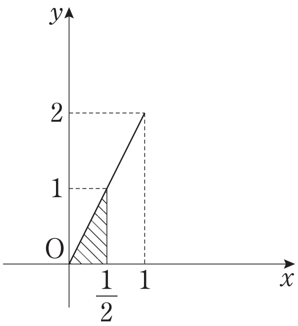
[1] 常に $f(x) \geqq 0$

[2] $P(a \leqq X \leqq b)=\int_a^b f(x)dx$

[3] Xのとりうる値の範囲が $\alpha \leqq X \leqq \beta$ のとき $\int_\alpha^\beta f(x)dx=1$

例 確率変数 X の確率密度関数が $f(x)=2x$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ で与えられているとき

$$P\left(0 \leqq X \leqq \frac{1}{2}\right)= \qquad\qquad =\frac{1}{4}$$



1　確率変数 X の確率密度関数が $f(x)=\dfrac{1}{2}x\,(0\leqq x\leqq 2)$ で与えられているとき，次の確率を求めよ。

(1)　$P(0.3\leqq X\leqq 0.7)$　　　(2)　$P(0\leqq X\leqq 2)$

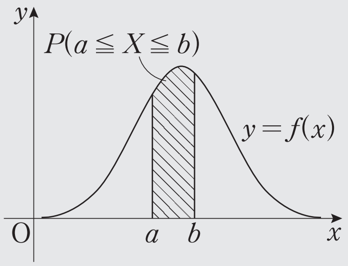
Point Pickup

確率密度関数と確率

連続型確率変数 X の確率密度関数を $f(x)$ とすると

$$P(a\leqq X\leqq b)=\int_a^b f(x)dx$$

$$=\left(\begin{array}{l}\text{曲線 } y=f(x) \text{ と } x \text{ 軸および 2 直線}\\ x=a,\ x=b \text{ で囲まれた部分の面積}\end{array}\right)$$



X のとりうる値の範囲が $\alpha\leqq X\leqq\beta$ のとき $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)dx=1$ である。

[MEMO]

§2 正規分布

要点整理 と 公式

要点① 正規分布

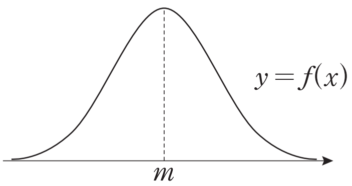
連続型確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が，m を実数，σ を正の実数として

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

で表されるとき，X は「　　　　　　　　　　　　　　」という。π は円周率，e は自然対数の底とよばれる無理数で，$e=2.71828\cdots\cdots$ である。X が正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ に従う確率変数であるとき

X の期待値 $E(X)=m$，X の標準偏差 $\sigma(X)=\sigma$

であることが知られている。



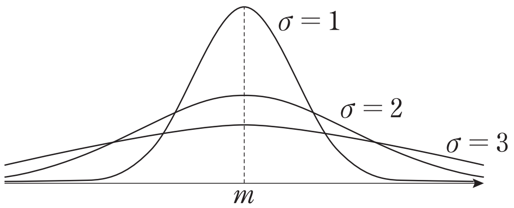
$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになり，次のような性質をもつ。

[1] 直線 $x=m$ に関して対称であり，y は $x=m$ のとき最大値をとる。

[2] x 軸を漸近線(曲線が限りなく近づく直線)とする。

[3] 標準偏差 σ について

- σ が大きくなると，曲線の山が低くなり，横に広がる。
- σ が小さくなると，曲線の山が高くなり，$x=m$ の周りに集まる。



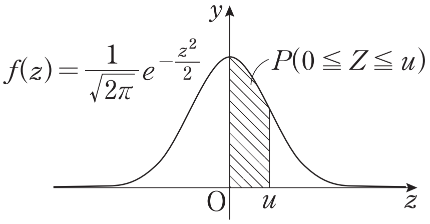
工場で一定の規格に基づいて作られた部品の重さの誤差など，社会現象や自然現象のデータの分布を，正規分布に従うとみなして考えることがある。

要点② 標準正規分布

期待値 $m=0$，標準偏差 $\sigma=1$ の正規分布　　　　　を「　　　　　　　」という。確率変数 Z が標準正規分布に従うとき，確率密度関数は

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$$

であり，その分布曲線は右図のようになる。



右図の斜線部分の面積は確率 $P(0\leqq Z\leqq u)$ を表し，u の値に対する確率 $P(0\leqq Z\leqq u)$ の値をまとめたものが「正規分布表」である。

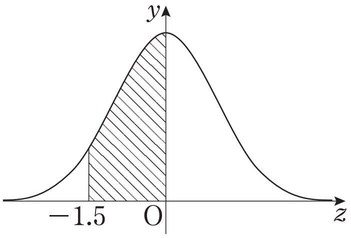
以下は正規分布表の一部である。

u	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

例　確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき

$P(0\leqq Z\leqq 0.55)=$

$P(-1.5\leqq Z\leqq 0)=P(\quad\leqq Z\leqq\quad)=$



2 確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき，以下の＜正規分布表＞を用いて，次の確率を求めよ。

(1)　$P(0 \leqq Z \leqq 0.53)$　　(2)　$P(-1.56 \leqq Z \leqq -1)$

＜ 正規分布表 ＞

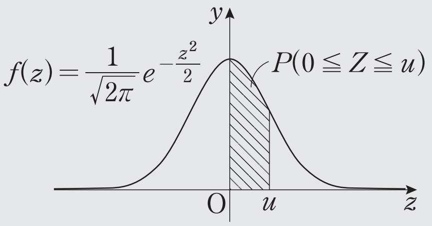
u	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Point Pickup

標準正規分布と確率

確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき，確率 $P(0 \leqq Z \leqq u)$ は，右図の斜線部分の面積に等しく，その値は正規分布表を用いて求めることができる。

分布曲線が $z=0$（y 軸）に関して対称であることに注目。



[MEMO]

§3 確率変数の標準化

要点整理 と 公式

要点 ① 確率変数の標準化

確率変数 X が $N(m,\ \sigma^2)$ に従うとき

$$Z=\frac{X}{\quad}$$

とおくと，Z は標準正規分布 $N(\ ,\ )$ に従うことが知られている。このように，確率変数 X を，標準正規分布に従う確率変数 Z に直すことを「　　　　」といい，この Z を，X を標準化した確率変数という。

例 確率変数 X が正規分布 $N(1,\ 2^2)$ に従うとき，確率 $P(-2\leqq X\leqq 2)$ を求める。

$Z=\frac{X}{\quad}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

$X=-2$ のとき　$Z=\frac{-2-1}{2}=-\frac{3}{2}=-1.5$

$X=2$ のとき　$Z=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}=0.5$

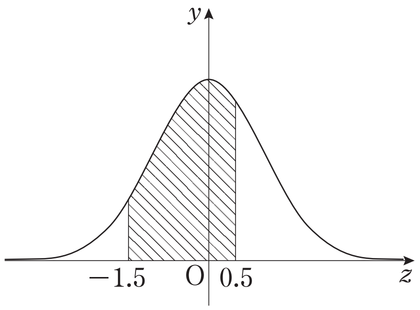
よって　$P(-2\leqq X\leqq 2)$

$=P(-1.5\leqq Z\leqq 0.5)$

$=P(-1.5\leqq Z\leqq 0)+P(0\leqq Z\leqq 0.5)$

$=P(0\leqq Z\leqq 1.5)+P(0\leqq Z\leqq 0.5)$

$=0.4332+0.1915=0.6247$



要点 ② 正規分布の利用

日常の身近な問題を，正規分布を利用して考える。

例 ある高校の 2 年生男子の身長が，平均 170 cm，標準偏差 6 cm の正規分布に従うものとする。この 2 年生男子の中で，身長 167 cm 以上 173 cm 以下の生徒は約何 % いるかを求める。

身長を Xcm とすると，X は正規分布 $N(\quad,\quad)$ に従う。

$Z=\frac{X-\quad}{\quad}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(\ ,\ )$ に従う。

$X=167$ のとき　$Z=-0.5$　　　$X=173$ のとき　$Z=0.5$

よって　$P(167 \leqq X \leqq 173)$

$= P(-0.5 \leqq Z \leqq 0.5)$

$= P(-0.5 \leqq Z \leqq 0) + P(0 \leqq Z \leqq 0.5)$

$=\quad P(0 \leqq Z \leqq 0.5) = 2 \cdot 0.1915 = 0.383$

したがって，約　　％いる。

＜正規分布表＞

u	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

3 ある高校の 2 年生女子の身長が，平均 157.9 cm，標準偏差 5 cm の正規分布に従うものとする。以下の<正規分布表>を用いて，次の問いに答えよ。

(1)　この 2 年生女子の中で，身長 155 cm 以上 163 cm 以下の生徒は約何 % いるか。

(2)　この 2 年生女子の中で，身長が平均を 10 cm 以上上回る生徒は約何 % いるか。

< 正規分布表 >

u	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Point Pickup

確率変数の標準化

確率変数 X が $N(m,\ \sigma^2)$ に従うとき，$Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$ とおくと，確率変数 Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。このことを利用して，確率変数 X に関する確率を，確率変数 Z に関する確率として求めることができる。

[MEMO]

§4 二項分布の正規分布による近似

要点整理 と 公式

要点 ① 二項分布の正規分布による近似

1 回の試行で事象 A が起こる確率が p である試行を n 回繰り返す反復試行において，事象 A が起こる回数を X とすると，X は二項分布 $B(n,\ p)$ に従う。このとき

$$P(X=r)={}_n\mathrm{C}_r\,p^r q^{n-r} \quad (q=1-p,\ r=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ n)$$

$$\text{期待値 } E(X)=np, \qquad \text{分散 } V(X)=npq, \qquad \text{標準偏差 } \sigma(X)=\sqrt{npq}$$

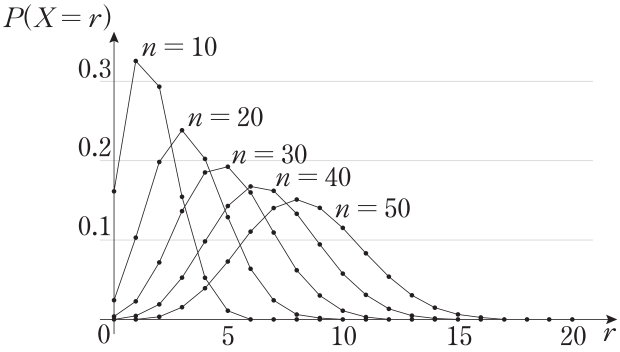
である。

1 個のさいころを n 回投げる試行で 1 の目が出る回数を X とすると，確率変数 X は二項分布 $B\left(n,\ \dfrac{1}{6}\right)$ に従う。この X について，

$P(X=r)$ を

$n=10,\ 20,\ 30,\ 40,\ 50$

のそれぞれについて計算し，折れ線グラフで表すと右図のようになり，n の値が大きくなるにつれてグラフの形は左右対称の山型に近づいていく。

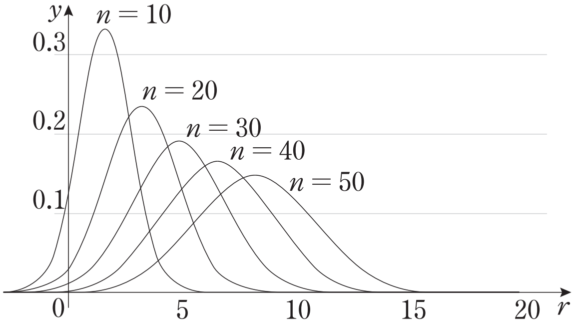


二項分布 $B\left(n,\ \dfrac{1}{6}\right)$ の期待値は $n\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{n}{6}$，分散は $n\cdot\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{5}{6}=\dfrac{5n}{36}$ である。

ここで，この二項分布と期待値，分散が等しい正規分布 $N\left(\dfrac{n}{6},\ \dfrac{5n}{36}\right)$ の分布曲線を

$n=10,\ 20,\ 30,\ 40,\ 50$

について描くと，右図のようになり，二項分布 $B\left(n,\ \dfrac{1}{6}\right)$ のグラフは，n が大きくなるにつれて正規分布 $N\left(\dfrac{n}{6},\ \dfrac{5n}{36}\right)$ のグラフに近づくことがわかる。



一般に，次のことが成り立つ。

二項分布の正規分布による近似

二項分布 $B(n,\ p)$ に従う確率変数 X は，n が十分に大きいとき，正規分布 $N(np,\ npq)$ に従うとみなしてよい。ただし，$q=1-p$ とする。

例 1 個のさいころを 720 回投げるとき，6 の目が出る回数が 110 回以下である確率を求める。

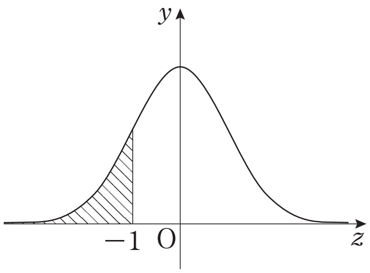
6 の目が出る回数を X とすると，X は二項分布　　　　　　　に従うから

$E(X)=$　　　　$=120$，　$V(X)=$　　　　　　$=100$，　$\sigma(X)=$　　　$=10$

$n=720$ は十分に大きいから，X は正規分布　　　　　　　に従うとみなしてよい。

ここで，$Z=\dfrac{X\qquad}{\qquad}$ とすると，Z は標準正規分布　　　　に従うので，求める確率は

$$
\begin{aligned}
P(X \leqq 110) &= P(Z \leqq -1)\\
&= P(Z \leqq 0) - P(-1 \leqq Z \leqq 0)\\
&= 0.5 - 0.3413\\
&= 0.1587
\end{aligned}
$$



＜正規分布表＞

u	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

4 1 枚の硬貨を 1600 回投げるとき，表の出る回数が 789 回以上である確率を求めよ。

< 正規分布表 >

u	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Point Pickup

二項分布の正規分布による近似

二項分布 $B(n,\ p)$ に従う確率変数 X は，n が十分に大きいとき

　　正規分布 $N(np,\ npq)$　　$(q=1-p)$

に従うとみなしてよい。

正規分布で近似し，さらに確率変数の標準化を行うことで，正規分布表を用いて確率を求めることができる。

[MEMO]

第 30 講　確認テスト

1 確率変数 X の確率密度関数が $f(x)=\dfrac{1}{18}x\ (0\leqq x\leqq 6)$ で与えられているとき，次の確率を求めよ。

(1) $P(1\leqq X\leqq 5)=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$

(2) $P(0\leqq X\leqq 6)=\boxed{ウ}$

2 確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき，以下の<正規分布表>を用いて，次の確率を求めよ。

<正規分布表>

u	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

(1) $P(-1.55\leqq Z\leqq 0)=0.$$\boxed{エオカキ}$

(2) $P(0.59\leqq Z\leqq 1.02)=0.$$\boxed{クケコサ}$

3 ある高校の生徒の通学時間が，平均 26 分，標準偏差 4 分の正規分布に従うものとする。以下の<正規分布表>を用いて，次の問いに答えよ。

<正規分布表>

u	.00	.01	.02	.03	.04	.05
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

(1)　通学時間が 24 分以上 30 分以下の生徒は約 [シス] %いる。

(2)　通学時間が 20 分以下の生徒は約 [セ] %いる。

4 1 個のさいころを 500 回投げるとき，1 の目が出る回数が 100 回以下である確率は 0. [ソタチツ] である。

<正規分布表>

u	.00	.01	.02	.03	.04	.05
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

第 30 講　正規分布

§1 連続分布

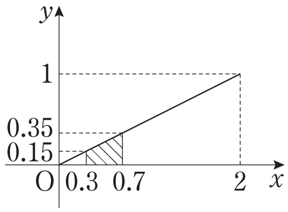
1　確率変数 X の確率密度関数が $f(x)=\dfrac{1}{2}x\,(0\leqq x\leqq 2)$ で与えられているとき，次の確率を求めよ。

(1)　$P(0.3\leqq X\leqq 0.7)$　　　　(2)　$P(0\leqq X\leqq 2)$

[解答]

(1)　$P(0.3\leqq X\leqq 0.7)=\dfrac{1}{2}\cdot(0.15+0.35)\cdot 0.4=0.1$

(2)　$P(0\leqq X\leqq 2)=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 1=1$



§2 正規分布

2 確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき，以下の＜正規分布表＞を用いて，次の確率を求めよ。

(1) $P(0 \leqq Z \leqq 0.53)$　　(2) $P(-1.56 \leqq Z \leqq -1)$

＜正規分布表＞

u	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

[解答]

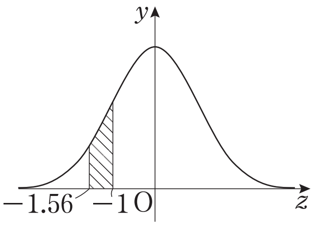
(1) $P(0 \leqq Z \leqq 0.53) = 0.2019$

(2) $P(-1.56 \leqq Z \leqq -1) = P(1 \leqq Z \leqq 1.56)$

$= P(0 \leqq Z \leqq 1.56) - P(0 \leqq Z \leqq 1)$

$= 0.4406 - 0.3413$

$= 0.0993$



§3 確率変数の標準化

3 ある高校の 2 年生女子の身長が，平均 157.9 cm，標準偏差 5 cm の正規分布に従うものとする。以下の＜正規分布表＞を用いて，次の問いに答えよ。

(1) この 2 年生女子の中で，身長 155 cm 以上 163 cm 以下の生徒は約何 % いるか。

(2) この 2 年生女子の中で，身長が平均を 10 cm 以上上回る生徒は約何 % いるか。

＜ 正規分布表 ＞

u	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

[解答]

身長を Xcm とすると，X は正規分布 $N(157.9,\ 5^2)$ に従う。

$Z=\dfrac{X-157.9}{5}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

(1) $X=155$ のとき　$Z=-0.58$　　　$X=163$ のとき　$Z=1.02$

よって　$P(155\leqq X\leqq 163)$

$=P(-0.58\leqq Z\leqq 1.02)$

$=P(-0.58\leqq Z\leqq 0)+P(0\leqq Z\leqq 1.02)$

$=P(0\leqq Z\leqq 0.58)+P(0\leqq Z\leqq 1.02)$

$=0.2190+0.3461=0.5651$

したがって，約 57% いる。

(2) $X=167.9$ のとき　$Z=2$

よって　$P(X\geqq 167.9)$

$=P(Z\geqq 2)$

$= 0.5 - P(0 \leqq Z \leqq 2)$

$= 0.5 - 0.4772 = 0.0228$

したがって，約 2% いる。

§4 二項分布の正規分布による近似

4 1 枚の硬貨を 1600 回投げるとき，表の出る回数が 789 回以上である確率を求めよ。

< 正規分布表 >

u	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

[解答]

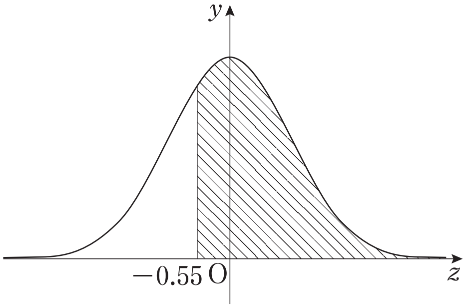
表が出る回数を X とすると，X は二項分布 $B\left(1600,\ \dfrac{1}{2}\right)$ に従うから

$$E(X)=1600\cdot\frac{1}{2}=800,\quad V(X)=1600\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=400,\quad \sigma(X)=\sqrt{400}=20$$

$n=1600$ は十分に大きいから，X は正規分布 $N(800,\ 20^2)$ に従うとみなしてよい。

ここで，$Z=\dfrac{X-800}{20}$ とすると，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うので，求める確率は

$$\begin{aligned}P(X\geqq 789)&=P(Z\geqq -0.55)\\&=P(-0.55\leqq Z\leqq 0)+P(Z\geqq 0)\\&=P(0\leqq Z\leqq 0.55)+P(Z\geqq 0)\\&=0.2088+0.5\\&=0.7088\end{aligned}$$



[MEMO]

第 30 講　確認テスト 解答

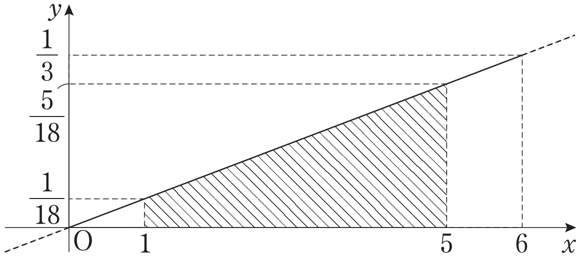
1

(1)　**[正解]** ア：2，イ：3

[解説]

$$P(1\leqq X\leqq 5)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{18}+\frac{5}{18}\right)\cdot 4 \quad \text{[A]}$$

$$=\frac{12}{18}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$$



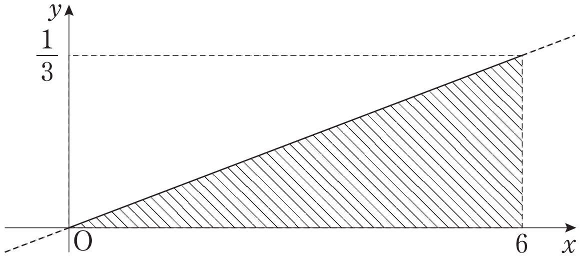
[A]　連続型確率変数 X の確率密度関数を $f(x)$ とすると，$P(a\leqq X\leqq b)$ は曲線 $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積を表す。

$$P(a\leqq X\leqq b)=\int_a^b f(x)dx$$

(2)　**[正解]** ウ：1

[解説]

$$P(0\leqq X\leqq 6)=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot\frac{1}{3}=\mathbf{1} \quad \text{[B]}$$



[B]　X のとりうる値の範囲が $\alpha\leqq X\leqq\beta$ のとき

$$P(\alpha\leqq X\leqq\beta)=\int_\alpha^\beta f(x)dx=1$$

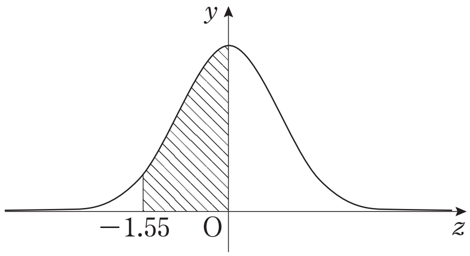
2

(1)　**[正解]** エオカキ：4394

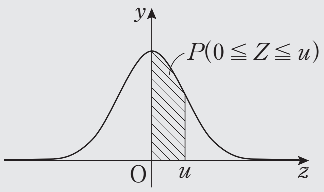
[解説]

$P(-1.55 \leqq Z \leqq 0) = P(0 \leqq Z \leqq 1.55)$ [C]

$= \mathbf{0.4394}$



[C]　確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき，確率 $P(0 \leqq Z \leqq u)$ は，グラフの斜線部分の面積に等しく，その値は正規分布表を用いて求めることができる。
分布曲線が $z=0$（y 軸）に関して対称であることに注目。



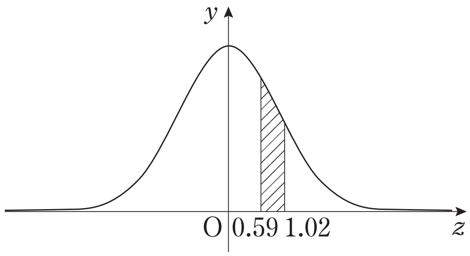
(2)　**[正解]** クケコサ：1237

[解説]

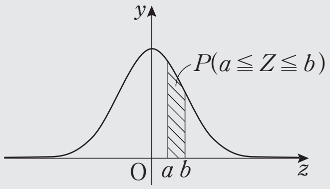
$P(0.59 \leqq Z \leqq 1.02)$

$= P(0 \leqq Z \leqq 1.02) - P(0 \leqq Z \leqq 0.59)$ [D]

$= 0.3461 - 0.2224 = \mathbf{0.1237}$



[D]　確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき，確率 $P(a \leqq Z \leqq b)$ は，グラフの斜線部分の面積に等しく，その値は正規分布表を用いて求めることができる。



3

(1) **[正解]シス：**53

[解説]

通学時間を X 分とすると，X は正規分布 $N(26,\ 4^2)$ に従う。

$Z=\dfrac{X-26}{4}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。 [E]

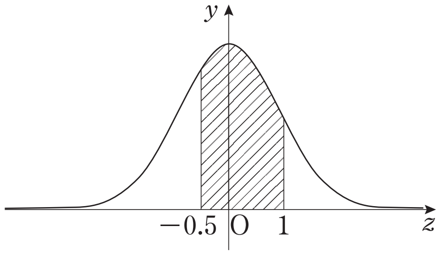
$X=24$ のとき $Z=-0.5$

$X=30$ のとき $Z=1$

よって

$$
\begin{aligned}
&P(24 \leqq X \leqq 30)\\
&=P(-0.5 \leqq Z \leqq 1)\\
&=P(-0.5 \leqq Z \leqq 0)+P(0 \leqq Z \leqq 1)\\
&=P(0 \leqq Z \leqq 0.5)+P(0 \leqq Z \leqq 1)\\
&=0.1915+0.3413=0.5328
\end{aligned}
$$

したがって，**約53%** いる。



[E]　確率変数 X が正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ に従うとき，$Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$ とおくと，確率変数 Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

(2)　**[正解]** セ：7

[解説]

通学時間を X 分とすると，X は正規分布 $N\left(26,\ 4^2\right)$ に従う。

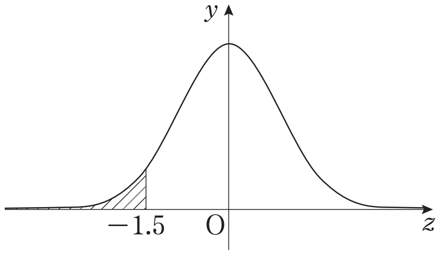
$Z=\dfrac{X-26}{4}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。 [F]

$X=20$ のとき $Z=-1.5$

よって

$$\begin{aligned} P(X \leqq 20) &= P(Z \leqq -1.5) \\ &= P(Z \geqq 1.5) \\ &= 0.5-P(0 \leqq Z \leqq 1.5) \\ &= 0.5-0.4332=0.0668 \end{aligned}$$

したがって，**約 7%** いる。



[F]　確率変数 X が正規分布 $N\left(m,\ \sigma^2\right)$ に従うとき，$Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$ とおくと，確率変数 Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

4 [正解] ソタチツ：9772

[解説]

1 の目が出る回数を X とすると，X は二項分布

$B\left(500,\ \dfrac{1}{6}\right)$ に従うから

$$E(X)=500\cdot\frac{1}{6}=\frac{250}{3}$$ [G]

$$V(X)=500\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{625}{9}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{625}{9}}=\frac{25}{3}$$

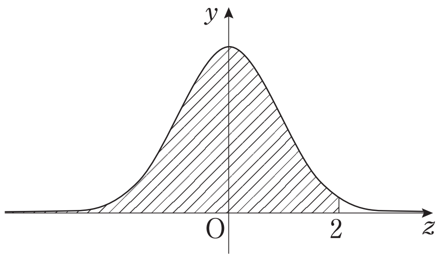
$n=500$ は十分に大きいから，X は正規分布

$N\left(\dfrac{250}{3},\ \left(\dfrac{25}{3}\right)^2\right)$ に従うとみなしてよい。 [H]

ここで，$Z=\dfrac{X-\dfrac{250}{3}}{\dfrac{25}{3}}=\dfrac{3X-250}{25}$ とすると，Z は

標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うので，求める確率は

$$\begin{aligned}&P(X\leqq 100)\\&=P(Z\leqq 2)\\&=P(Z\leqq 0)+P(0\leqq Z\leqq 2)\\&=P(Z\geqq 0)+P(0\leqq Z\leqq 2)\\&=0.5+0.4772=\mathbf{0.9772}\end{aligned}$$



[G]　確率変数 X が二項分布 $B(n,\ p)$ に従うとき，$q=1-p$ とすると $E(X)=np$，$V(X)=npq$，$\sigma(X)=\sqrt{npq}$

[H]　二項分布 $B(n,\ p)$ に従う確率変数 X は，n が十分に大きいとき，正規分布 $N(np,\ npq)$ に従うとみなしてよい。ただし，$q=1-p$